

Unidad II

Análisis en estado transitorio y permanente

2.1. Circuito RL y RC sin fuente.

Los circuitos RL son aquellos que contienen una bobina (inductor) que tiene autoinductancia, esto quiere decir que se considera mucho menor a la del inductor. decir que evita cambios instantáneos en la corriente. Siempre se desprecia la autoinductancia en el resto del circuito puesto que se considera mucho menor a la del inductor. Para un tiempo igual a cero, la corriente comenzará a crecer y el inductor producirá igualmente una fuerza electromotriz en sentido contrario, lo cual hará que la corriente no aumente. A esto se le conoce como fuerza contraelectromotriz.

Esta fem está dada por: $V = -L \text{ (inductancia) } di/dt$

Debido a que la corriente aumentará con el tiempo, el cambio será positivo (di/dt) y la tensión será negativa al haber una caída de la misma en el inductor.

Según Kirchhoff: $V = (IR) + [L (di / dt)]$

IR = Caída de voltaje a través de la resistencia.

Esta es una ecuación diferencial y se puede hacer la sustitución:

$x = (V/R) - I$ es decir; $dx = -dI$

Sustituyendo en la ecuación: $x + [(L/R)(dx/dt)] = 0$

$dx/x = - (R/L) dt$

Integrando: $\ln (x/x_0) = -(R/L) t$

Despejando x : $x = x_0 e^{-Rt / L}$

Debido a que $x_0 = V/R$

El tiempo es cero

Y corriente cero $V/R - I = V/R e^{-Rt / L}$

$I = (V/R) (1 - e^{-Rt / L})$

El tiempo del circuito está representado por $t = L/R$

$I = (V/R) (1 - e^{-1/t})$

Donde para un tiempo infinito, $I = V/R$. Y se puede considerar entonces el cambio de la corriente en el tiempo como cero.

Para verificar la ecuación que implica a t y a I , se deriva una vez y se reemplaza en la inicial: $di/dt = V/L e^{-1/t}$

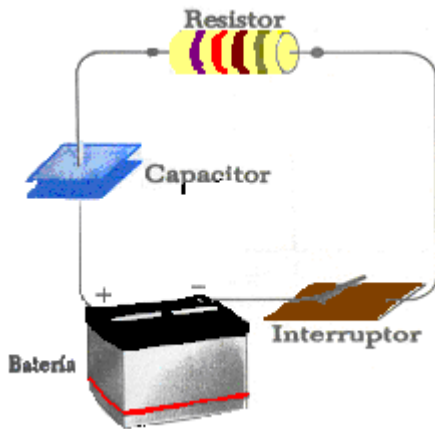
Se sustituye: $V = (IR) + [L (di / dt)]$

$V = [(V/R) (1 - e^{-1/t})R + (L V / L e^{-1/t})]$

$V - V e^{-1/t} = V - V e^{-1/t}$

Publicado por CIRCUITOS en 19:15 No hay comentarios:

CIRCUITOS RC



Los circuitos RC son circuitos que están compuestos por una resistencia y un condensador.

Se caracteriza por que la corriente puede variar con el tiempo. Cuando el tiempo es igual a cero, el condensador está descargado, en el momento que empieza a correr el tiempo, el condensador comienza a cargarse ya que hay una corriente en el circuito. Debido al espacio entre las placas del condensador, en el circuito no circula corriente, es por eso que se utiliza una resistencia.

Cuando el condensador se carga completamente, la corriente en el circuito es igual a cero.

La segunda regla de Kirchoff dice: $V = (IR) - (q/C)$

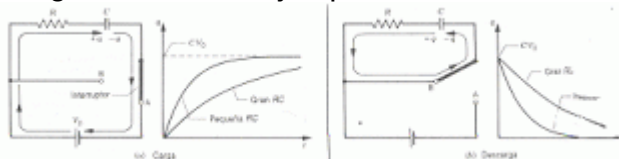
Donde q/C es la diferencia de potencial en el condensador.

En un tiempo igual a cero, la corriente será: $I = V/R$ cuando el condensador no se ha cargado.

Cuando el condensador se ha cargado completamente, la

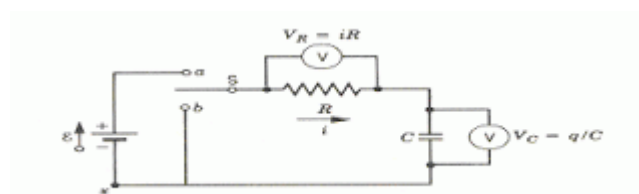
corriente es cero y la carga será igual a: $Q = CV$

La figura ilustra un ejemplo de un circuito resistor-capacitor, o circuito RC



3. Carga de un capacitor

Si cargamos al capacitor de la figura siguiente al poner el interruptor Sen la posición a. ¿ Que corriente se crea en el circuito cerrado resultante?, aplicando el principio de conservación de energía tenemos:



En el tiempo dt una carga $dq (=i dt)$ pasa a través de cualquier sección transversal del circuito. El trabajo ($= \epsilon dq$) efectuado por la fem debe ser igual a la energía interna ($= i^2 R dt$) producida en el resistor durante el tiempo dt , mas el incremento

dU en la cantidad de energía U ($=q^2/2C$) que esta almacenada en el capacitor. La conservación de la energía da:

$$\epsilon \frac{dq}{dt} = i^2 R dt + \frac{q}{C} \frac{dq}{dt}$$

Al dividir entre dt se tiene:

$$\epsilon \frac{dq}{dt} = i^2 R + \frac{q}{C} \frac{dq}{dt}$$

Puesto que q es la carga en la placa superior, la i positiva significa dq/dt positiva.

Con $i = dq/dt$, esta ecuación se convierte en

$$\epsilon = i R dt + \frac{q}{C}$$

La ecuación se deduce tambien del teorema del circuito cerrado, como debe ser puesto que el teorema del circuito cerrado se obtuvo a partir del principio de conservación de energía . Comenzando desde el punto xy rodeando al circuito en el sentido de las manecillas del reloj, experimenta un aumento en potencial, al pasar por la fuente fem y una disminución al pasar por el resistor y el capacitor ,

$$\epsilon - i R - \frac{q}{C} = 0$$

La cual es idéntica a la ecuación $\epsilon = i R dt + \frac{q}{C}$ sustituimos primero por i por dq/dt, lo cual da:

$$\epsilon = R \frac{dq}{dt} + \frac{q}{C}$$

Podemos reescribir esta ecuación así:

$$\frac{dq}{dt} + \frac{q}{RC} = \frac{\epsilon}{R}$$

Si se integra este resultado para el caso en que $q = 0$ en $t = 0$, obtenemos: (despejando q),

$$q = C \epsilon (1 - e^{-t/RC})$$

Se puede comprobar que esta función q (t) es realmente una solución de la ecuación

$\epsilon = R \frac{dq}{dt} + \frac{q}{C}$, sustituyendol en dicha ecuación y viendo si reobtiene una identidad. Al derivar la ecuación $q = C \epsilon (1 - e^{-t/RC})$ con respecto al tiempo da:

$$i = \frac{dq}{dt} = \epsilon e^{-t/RC}$$

En las ecuaciones $q = C \epsilon (1 - e^{-t/RC})$ y $i = \frac{dq}{dt} = \epsilon e^{-t/RC}$ la cantidad RC tiene

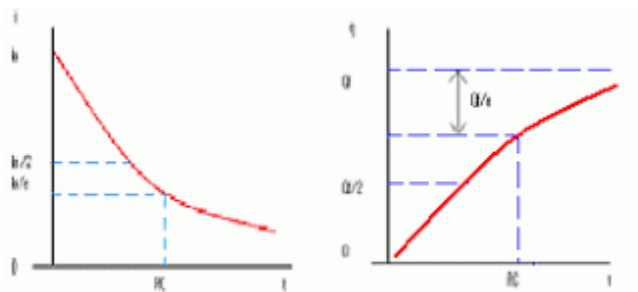
las dimensiones de tiempo porque el exponente debe ser adimensional y se llama constantecapacitiva de tiempo τ C del circuito

$$\tau C = RC$$

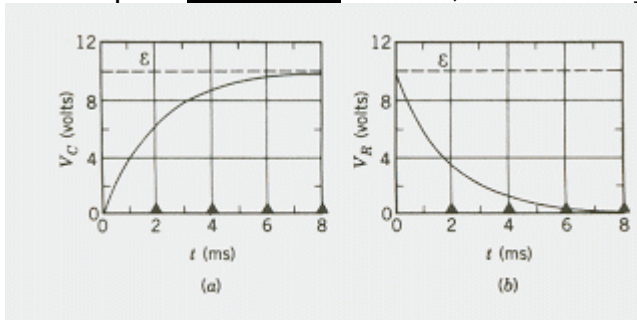
Es el tiempo en que ha aumentado la carga en el capacitor en un factor $1 - e^{-1}$ (~63%) de su valor final $C \epsilon$, Para demostrar esto ponemos $t = \tau C = RC$ en la ecuación $q = C \epsilon (1 - e^{-t/RC})$ para obtener:

$$q = C \epsilon (1 - e^{-1}) = 0.63 C \epsilon$$

Grafica para el circuito



Corriente i y carga del capacitor q . La corriente inicial es i_0 y la carga inicial en el capacitor es cero. La corriente se aproxima asintóticamente a cero y la carga del capacitor tiende asintóticamente a su valor final Q_f . Grafica para los valores $\mathcal{E} = 10\text{V}$, $R = 2000\ \Omega$ y $C = 1\ \mu\text{F}$



Esta figura en la parte a muestra que si un circuito se incluye una resistencia junto con un capacitor que esta siendo cargado, el aumento de carga en el capacitor hacia su valor límite se retrasa durante su tiempo caracterizado por la constante de tiempo RC . Si un resistor presente ($RC=0$), la carga llegaría inmediatamente hacia su valor límite. También en la parte a como se indica por la diferencia de potencial V_C , la carga aumenta con el tiempo durante el proceso de carga y V_C tiende al valor de la fem $\mathcal{E}$.

El tiempo se mide en el momento en que el interruptor conecta en a para $t=0$. En la parte b de la figura La diferencia de potencial en el resistor disminuye con el tiempo, tendiendo a 0 en tiempos posteriores porque la corriente cae a cero una vez que el capacitor esta totalmente cargado. Las curvas esta dibujadas para el caso $\mathcal{E} = 10\text{V}$, $R = 2000\ \Omega$ y $C = 1\ \mu\text{F}$. Los triángulos negros representan las constantes de tiempos sucesivas.

DESCARGA DE UN CONDENSADOR

Debido a que la diferencia de potencial en el condensador es $IR = q/C$, la razón de cambio de carga en el condensador determinará la corriente en el circuito, por lo tanto, la ecuación que resulte de la relación entre el cambio de la cantidad de carga dependiendo del cambio en el tiempo y la corriente en el circuito, estará dada reemplazando $I = dq/dt$ en la ecuación de diferencia de potencial en el condensador:

$$q = Q e^{-t/RC}$$

Donde Q es la carga máxima

La corriente en función del tiempo entonces, resultará al derivar esta ecuación respecto al tiempo:

$$I = Q/(RC) e^{-t/RC}$$

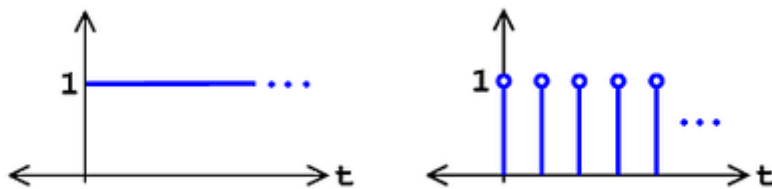
Se puede concluir entonces, que la corriente y la carga decaen de forma exponencial.

2.2. Funciones singulares: Escalón, impulso y rampa unitaria.

Escalón :

Se define como

$$u(t) = \begin{cases} 0 & \text{if } t < 0 \\ 1 & \text{if } t \geq 0 \end{cases}$$



(a) Escalón unitario de Tiempo-Continuo (b) Escalón unitario de Tiempo-Discreto

Note que esta función es discontinua en el origen; sin embargo no se necesita definirla en este punto ya que no es necesario en la teoría de la señal. La función de Escalón unitario es una señal muy útil para probar y definir otras señales. Por ejemplo, usando varias de estas señales movidas en el tiempo y multiplicadas por otras señales, se puede obtener alguna porción de la señal por la que fue multiplicada y eliminar el resto.

Función Impulso:

La Función Delta de Dirac, conocida también como el impulso unitario o función delta es una función infinitamente angosta, infinitamente alta, cuya integral tiene un valor unitario (Ver ecuación 1 abajo). Tal vez la manera mas simple de visualizar esto es usar un pulso rectangular que va de

a
con una altura de

.
Al momento de tomar su límite,
, podemos observar que su ancho tiende a ser cero y su altura tiende a infinito conforme su área total permanece constante con un valor de uno. La función del impulso usualmente se escribe como .

Función Rampa:

Esta función está relacionada con la función descrita anteriormente. La función Escalón unitario va desde cero a uno instantáneamente, pero esta función es la que mejor se parece a una función en la vida real, donde se necesita un tiempo para que la señal vaya incrementándose desde cero a su valor ajustado, en este caso uno. La función rampa está definida así:

$$a_n = \frac{1}{p} \int_{-p}^p f(x) \cos \frac{n\pi x}{p} dx,$$

$$b_n = \frac{1}{p} \int_{-p}^p f(x) \sin \frac{n\pi x}{p} dx,$$

2.3. La respuesta transitoria y permanente.

En muchos casos prácticos, las características de diseño deseadas de los sistemas de control, sean en tiempo continuo o en tiempo discreto, se especifican en términos de cantidades en el dominio del tiempo. Esto ocurre debido a que los sistemas con almacenamiento de energía no pueden responder de forma instantánea, y siempre que estén sujetos a entradas o perturbaciones mostrarán algunas respuestas transitorias.

Con frecuencia, las características de diseño de un sistema de control están especificadas en términos de su respuesta transitoria a una entrada escalón unitario, ya que dicha entrada es fácil de generar, y sirve para proporcionar información útil de las características de la respuesta transitoria.

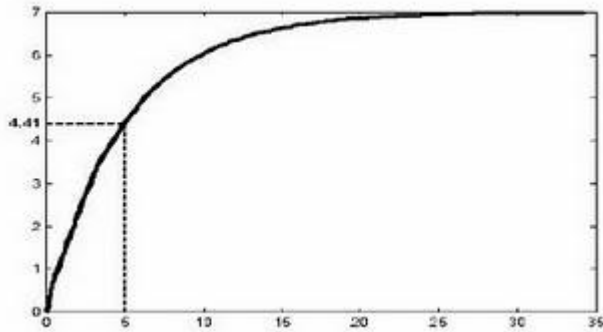
La respuesta transitoria de un sistema a una entrada escalón unitario depende de las condiciones iniciales. Por comodidad, al comparar respuestas transitorias de varios sistemas, es frecuente utilizar la condición inicial estándar: el sistema está inicialmente en reposo, y la salida y todas sus derivadas con respecto al tiempo son cero. Las características de respuesta pueden entonces compararse sin dificultad.

Ejemplo:

Se define el intervalo de retardo k_d como el índice del primer elemento de la secuencia de salida con valor mayor o igual a la mitad del valor final de ésta. En los sistemas discretos de control la salida es una respuesta temporal, por lo que el tiempo de retardo t_d se define como:

$t_d = \frac{k}{d} T$
 El procedimiento k_d recibe como parámetro la secuencia de puntos de la salida y calcula el intervalo de retardo k_d . El procedimiento t_d calcula el tiempo de retardo correspondiente. Sus parámetros, como ya se ha indicado, son expr , el período de muestreo T y el número max de puntos de la secuencia.

Por **respuesta permanente** se entiende la forma en la cual la salida del sistema se comporta cuando t tiende a infinito.



2.4. Concepto y uso del fasor.

Un **fasor** es una representación gráfica de un número complejo que se utiliza para representar una oscilación, de forma que el fasor suma de varios fasores puede representar la magnitud y fase de la oscilación resultante de la superposición de varias oscilaciones en un proceso de interferencia.

Los fasores se utilizan directamente en Óptica, Ingeniería de Telecomunicaciones, Electrónica y Acústica. La longitud del fasor da la amplitud y el ángulo entre el mismo y el eje-x la fase angular. Debido a las propiedades de la matemática de oscilaciones, en electrónica los fasores se utilizan habitualmente en el análisis rudimentario de circuitos en AC. Finalmente, los fasores pueden ser utilizados para describir el movimiento de un oscilador. Las proyecciones del fasor en los ejes x e y tiene diferentes significados físicos.

Los fasores se usan sobre todo para resolver visualmente problemas del tipo: "existen varias ondas de la misma frecuencia pero fases y amplitudes diferentes interfiriendo en un punto, ¿cual es la intensidad resultante?". Para solventar este problema, se dibuja un fasor para cada una de las oscilaciones en dicho punto y después se aplica la suma fasorial (similar a la suma vectorial) sobre ellos. La longitud del fasor resultante es la amplitud de la oscilación resultante, y su longitud puede elevarse al cuadrado para obtener la intensidad. Nótese que mientras que la suma de varias oscilaciones sinusoidales no es necesariamente otra oscilación sinusoidal, la suma de varias oscilaciones sinusoidales de la misma frecuencia sí lo es, permitiendo leer la fase resultante como el ángulo del fasor resultante.

Una senoide u oscilación sinusoidal está definida como una función de la forma

$$y = A \operatorname{sen}(\omega t + \phi)$$

donde

y es la magnitud que varía (oscila) con el tiempo

ϕ es una constante (en **radianes**) conocida como el ángulo de fase de la senoide

A es una constante conocida como la amplitud de la senoide. Es el valor de pico de la función sinusoidal.

ω es la frecuencia angular dada por $\omega = 2\pi f$ donde f es la frecuencia.

t es el tiempo.

Esto puede ser expresado como

$$y = \Im\{A(\cos(\omega t + \phi) + i \operatorname{sen}(\omega t + \phi))\}$$

donde

i es la **unidad imaginaria** definida como $i^2 = -1$. En ingeniería eléctrica se usa "j" en lugar de "i" para evitar las confusiones que se producirían con el mismo símbolo que se usa para designar la intensidad de la corriente eléctrica.

$\Im(Y)$ da la parte imaginaria del número complejo "Y".

De forma equivalente, según la **fórmula de Euler**,

$$y = \Im(Ae^{i(\omega t + \phi)})$$

$$y = \Im(Ae^{i\phi}e^{i\omega t})$$

"Y", la representación fasor de esta senoide se define de la forma siguiente:

$$Y = Ae^{i\phi}$$

de forma que

$$y = \Im(Ye^{i\omega t})$$

Así, el fasor Y es el número complejo constante que contiene la magnitud y fase de la senoide. Para simplificar la notación, los fasores se escriben habitualmente en **notación angular**:

$$Y = A \angle \phi$$

Dentro de la **Ingeniería Eléctrica**, el ángulo fase se especifica habitualmente en **grados sexagesimales** en lugar de en radianes y la magnitud suele ser el **valor eficaz** en lugar del valor de pico de la senoide.

Una senoide u oscilación sinusoidal está definida como una función de la forma

$$y = A \operatorname{sen}(\omega t + \phi)$$

donde

y es la magnitud que varía (oscila) con el tiempo

ϕ es una constante (en **radianes**) conocida como el ángulo de fase de la senoide

A es una constante conocida como la amplitud de la senoide. Es el valor de pico de la función sinusoidal.

ω es la frecuencia angular dada por $\omega = 2\pi f$ donde f es la frecuencia.

t es el tiempo.

Esto puede ser expresado como

$$y = \Im\{A(\cos(\omega t + \phi) + i \operatorname{sen}(\omega t + \phi))\}$$

donde

i es la **unidad imaginaria** definida como $i^2 = -1$. En ingeniería eléctrica se usa "j" en lugar de "i" para evitar las confusiones que se producirían con el mismo símbolo que se usa para designar la intensidad de la corriente eléctrica.

$\Im(Y)$ da la parte imaginaria del número complejo "Y".

De forma equivalente, según la **fórmula de Euler**,

$$y = \Im(Ae^{i(\omega t + \phi)})$$

$$y = \Im(Ae^{i\phi}e^{i\omega t})$$

"Y", la representación fasor de esta senoide se define de la forma siguiente:

$$Y = Ae^{i\phi}$$

de forma que

$$y = \Im(Ye^{i\omega t})$$

Así, el fasor Y es el número complejo constante que contiene la magnitud y fase de la senoide. Para simplificar la notación, los fasores se escriben habitualmente en **notación angular**:

$$Y = A\angle\phi$$

Dentro de la **Ingeniería Eléctrica**, el ángulo fase se especifica habitualmente en **grados sexagesimales** en lugar de en radianes y la magnitud suele ser el **valor eficaz** en lugar del valor de pico de la senoide.

2.5. Técnicas de análisis de circuitos eléctricos con fasores.

Los circuitos eléctricos, ya sea de corriente directa o de corriente alterna se pueden estudiar con las mismas técnicas de análisis. Las leyes de Kirchoff se cumplen en cualquier circuito, en todo momento, no importa su complejidad y las componentes que forman parte del mismo. Las técnicas más utilizadas para estudiar los circuitos son el análisis de mallas, el análisis de nodos, el principio de superposición, la técnica de transformación de fuentes, el teorema de Thevenin. Aquí se describirán todas las técnicas y se aplicarán utilizando circuitos de mediana complejidad. Los programas de simulación y estudio de los circuitos como PSpice, EWB, etc. utilizan alguna de estas técnicas. La técnica mas utilizada es el análisis de nodos que se puede aplicar a cualquier circuito ya sea planar o no planar.

Análisis de nodos

La técnica de nodos es útil para estudiar circuitos

- En el dominio del tiempo, circuitos donde se encuentran fuentes de poder constantes en el tiempo y elementos puramente resistivos.
- En estado estable; esto es, circuitos bajo la acción de una señal de frecuencia constante. En este caso, se utiliza el circuito equivalente en el dominio de la frecuencia y el mismo se construye reemplazando las fuentes por el fasor

correspondiente y los elementos pasivos se reemplazan por su impedancia correspondiente.